

Mécanique quantique
Série n°2 SM- SMI

Exercices de mathématiques :

I- Soit la fonction créneau $f(x)$ donnée par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > a \\ 1 & \text{si } |x| < a \end{cases}$

- Calculer la Transformée de Fourier T.F. ($f(x)$)
- Représenter graphiquement $f(x)$ et T.F. ($f(x)$) (cas où $a= 3$)

II- Soient $f(x)$ et $g(k)$ les T.F. l'une de l'autre. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(k)|^2 dk \quad \text{C'est l'égalité de Parseval- Plantherel.}$$

III- Développer la fonction $f(x)= x$ avec $0 < x < 2$ en :

- Série de sinus
- Série de cosinus

En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

IV- Chercher une série de Fourier pour $f(x)=x^2$ ($0 < x < 2$) par intégration de la série de sinus de

$f(x)=x$ ($0 < x < 2$). En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

V- Démontrer le théorème relatif au calcul de la T.F. d'un produit de convolution

VI- Calculer la T. F. de la fonction gaussienne $f(x)= \exp(-\alpha x^2)$

VII- Montrer que la distribution de Dirac δ peut être représentée comme la limite d'une

lorentzienne : $y(x, \varepsilon) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$ avec $\varepsilon > 0$

Il existe d'autres représentations possibles:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} e^{-\frac{|x|}{\varepsilon}}$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{x}$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}$$

VIII- Considérons les fonctions d'ondes suivantes:

$$\psi_1(x) = \cos x$$

$$\psi_2(x) = e^{-i2\beta x}$$

$$\psi_3(x) = e^{-\alpha x^2}$$

$$\psi_4(x) = \cos kx + \sin kx$$

$$\psi_5(x) = \cos x - i \sin kx$$

Quelles sont les fonctions propres de $P = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$?

Quelles sont les fonctions propres de P^2 ?

Déterminer ΔP . En déduire Δx .

IX- Lesquels des opérateurs A_i ci-dessous sont-ils linéaires ?

$$\begin{aligned} A_1 \psi(x) &= (\psi(x))^2 & A_2 \psi(x) &= \frac{d\psi}{dx} \\ A_3 \psi(x) &= \int_a^x \psi(x') dx' & A_4 \psi(x) &= x^2 \psi(x) \\ A_5 \psi(x) &= \sin \psi(x) & A_6 \psi(x) &= \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} \end{aligned}$$

Exercices sur le chapitre 2

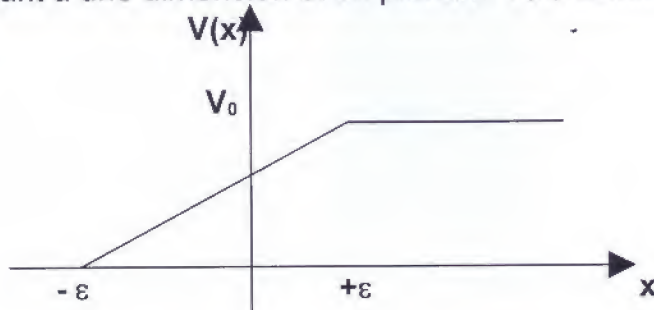
I- On considère une particule de masse m animée d'une vitesse \vec{v} soumise à un potentiel $V(\vec{r})$ indépendant du temps.

1- Ecrire l'équation de Schrödinger de cette particule.

2- En posant la fonction d'onde décrivant cette particule sous la forme : $\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) u(t)$

Montrer que : $u(t) = A e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$ et que $\phi(\vec{r})$ obéit à l'équation de Schrödinger indépendante du temps de la forme $H\phi(\vec{r}) = E \phi(\vec{r})$

3- En se plaçant à une dimension et en prenant $V(x)$ comme indiqué ci-dessous:



a- Exprimer $\phi'(\varepsilon) - \phi'(-\varepsilon)$

b- Calculer la limite de cette quantité quand $\varepsilon \rightarrow 0$ selon que V est fini ou infini. Conclure

II- Un état d'énergie est dit lié si sa fonction d'onde s'annule à l'infini. Dans le cas contraire, il est dit non lié.

Une fonction d'onde décrivant un état indépendant du temps (état stationnaire) d'une particule en mouvement sur un axe $X'OX$ est donnée par : $\phi(x) = A e^{-a|x|}$ avec $a > 0$

1- Déterminer A pour que la fonction $\phi(x)$ soit normée. S'agit-il d'un état lié?

2- Déterminer $\phi'(\varepsilon) - \phi'(-\varepsilon)$. Conclure.

III- Soit $\phi(r, \theta, \varphi) = B e^{-br^2}$ avec $b > 0$, la fonction qui décrit une particule de masse m .

1- Déterminer B pour que la fonction ϕ soit normée. S'agit-il d'un état lié?

2- Déterminer la forme du potentiel correspondant.

IV- Un électron est décrit par une fonction d'onde $\psi(x) = C e^{-b|x|}$ avec $b = 2 \text{ \AA}^{-1}$ et $-\infty < x < +\infty$

1- Calculer C pour que la fonction ψ soit normée à l'unité.

2- Chercher la probabilité pour que l'électron soit dans la région $0 \leq x \leq 0,25 \text{ \AA}$

3- Utiliser le résultat de 2- pour calculer la probabilité pour que l'électron soit dans la zone $0,25 \text{ \AA} \leq x < +\infty$.

V- La fonction d'onde d'un système quantique est donnée par: $\psi_0(x) = Ce^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$

1- Déterminer C pour que la fonction ψ soit normée à l'unité.

2- Déterminer l'incertitude Δx sur x et Δp sur p

On prendra $(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

En déduire le produit $\Delta x \Delta p$

3- Montrer que $\langle x \rangle$ et $\langle p \rangle$ restent nulles à tout instant.

VI- Une particule de masse m, peut se déplacer suivant l'axe X'OX. Elle est soumise à une force de rappel de la part de O égale à $F = -m\omega^2 x$. Cette particule est représentée à l'instant

initial par le paquet d'ondes : $\psi(x,0) = \frac{1}{(2\pi\sigma)^{0,25}} e^{i\langle p \rangle_0 \frac{x}{\hbar}} Ce^{-\frac{(x - \langle x \rangle_0)^2}{4\sigma}}$

En utilisant le théorème d'Ehrenfest, déterminer la position moyenne $\langle x \rangle_t$ et l'impulsion moyenne $\langle p \rangle_t$ à l'instant t.

$\langle x \rangle_0$ et $\langle p \rangle_0$ sont les valeurs moyennes pour $t=0$.

VII- A la date $t=0$, on considère un paquet d'onde $\psi(x,0)$ à une dimension, de position moyenne x_0 et d'impulsion moyenne p_0 , défini par :

$$\psi(x,0) = e^{i\frac{p_0 x}{\hbar}} f(x - x_0) \text{ avec } f(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

La transformée de Fourier de f a pour expression:

$$\text{T.F.}(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{px}{\hbar}} f(x) dx = C \frac{\sigma}{\sqrt{\hbar}} e^{-\frac{p^2 \sigma^2}{2\hbar^2}}$$

1- Donner l'expression de la T.F. de $\psi(x,0)$ et dessiner l'allure de $|\psi(x,0)|^2$ et $|\text{T.F.}(\psi(x,0))|^2$

2- Le paquet d'onde évolue librement. On note $H = \frac{p^2}{2m}$ l'hamiltonien du système.

Déterminer l'expression de $\text{T.F.}(\psi(x,t))$

3- Faire l'approximation, à l'ordre 1 en p, de H: $H(p) \approx H(p_0) + (p - p_0) \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_{p=p_0}$

Pour déduire l'expression de $\psi(x,t)$. Tracer l'allure de $|\psi(x,t)|^2$

4- Même question que précédemment en poussant le développement jusqu'à l'ordre 2 en p.

VIII. Une particule de masse m et d'énergie E est décrite par le paquet d'ondes

$$\psi(x, t) \text{ à une dimension} \quad \psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \, g(p) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right]$$

où $g(p)$ est une fonction de l'impulsion p ($p \equiv p_x$) de la particule.

1- Sachant que $\psi(x, t)$ obéit à l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t),$$

Trouver la relation entre E et p ; en déduire la nature du mouvement de la particule.

2- La fonction $g(p)$ est donnée par :

$$g(p) = B \exp[-A(p - p_0)^2] \quad \text{où} \quad B \equiv \frac{(2\pi a^2)^{1/4}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad \text{et} \quad A \equiv \frac{a^2}{4\hbar^2} ; \quad p_0 \text{ et } a \text{ sont des}$$

constantes.

Exprimer $\psi(x, t = 0)$, en utilisant la formule suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp[-\alpha^2 p^2 \pm \beta p] = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right) \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes,}$$

Donner l'abscisse du centre du paquet d'ondes à l'instant $t = 0$.

3- Rappeler la définition de la vitesse de groupe v_g ; calculer v_g en fonction de p et m .

En déduire l'abscisse du centre du paquet d'onde à l'instant t .